Данная статья посвящена теме выражения функций через свои предыдущие значения. В статье я покажу, что для любой функции $S(t)$, заданной полиномом степени $n$ возможно выражение всех его значений через $(n+1)$ предыдущих значений функции $S(t)$, взятых через равный интервал $\varphi$. Интервал может быть задан произвольным числом, дробным или целым, сколь угодно малым и сколь угодно большим. Полученные формулы универсальны, и позволяют вычислять значение функции $S(t)$ как вперёд, так и назад без изменения самих формул.

В качестве выводов из полученных результатов можно сказать, что, например, через любые три равноотстоящие точки можно провести единственную кривую, заданную квадратичным полиномом. Также через 4 равноотстоящие точки можно провести единственную кривую, заданную кубическим полиномом и так далее. В обобщённом виде: через $(n+1)$ произвольных равноотстоящих точек можно провести единственную кривую, заданную полиномом степени $n$.

Полученные результаты были проверены с помощью программы для ЭВМ: значения, вычисленные с помощью полиномов, абсолютно совпадают с результатами, полученными с помощью формул из данной статьи. Проверка выполнялась для первых 100 значений полиномов со степенями от 1 до 99. Шаг $\varphi$, через который брались предыдущие значения функции $S(t)$ варьировался в произвольных пределах. Коэффициенты при степенях полиномов также варьировались в произвольных пределах.

Пусть начальная функция задана линейным уравнением:

$S(t) = Q_1 t + Q_0$ *(формула 1)*

Теперь путём добавления некой случайной функции $\varepsilon(t)$ получим следующую формулу:

$x(t) = S(t) + \varepsilon(t)$ *(формула 2)*

$x(t) = Q_1 t + Q_0 + \varepsilon(t)$ *(формула 2)*

Следовательно:

$Q_0 = x(t) - Q_1 t - \varepsilon(t)$ *(формула 4)*

Приведу формулы разностей с шагом $\varphi$ для функции $x(t)$:

$\Delta x(t) = x(t) - x(t-\varphi)$ *(формула 5)*

$\Delta^2 x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-\varphi) = x(t) - x(t-\varphi) - x(t-\varphi) + x(t-2\varphi) = x(t) - 2x(t-\varphi) + x(t-2\varphi)$ *(формула 6)*

Теперь выразим те же разности, но с помощью формулы 2:

$\Delta x(t) = x(t) - x(t-\varphi) = Q_1 t + Q_0 + \varepsilon(t) - Q_1(t-\varphi) - Q_0 - \varepsilon(t-\varphi) = Q_1 t - Q_1(t-\varphi) + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\varphi) = Q_1\varphi + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\varphi)$ *(формула 7)*

$\Delta^2 x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-\varphi) = Q_1\varphi + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\varphi) - Q_1\varphi - \varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi)$ *(формула 8)*

Следовательно:

$\varepsilon(t) = \Delta^2 x(t) + 2\varepsilon(t-\varphi) - \varepsilon(t-2\varphi)$ *(формула 9)*

Теперь подставим значение формулы 9 в формулу 4:

$Q_0 = x(t) - Q_1 t - \varepsilon(t) = x(t) - Q_1 t - \Delta^2 x(t) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi)$ *(формула 10)*

Далее в формулу 10 подставим значение из формулы 6:

$Q_0 = x(t) - Q_1 t - \big(x(t) - 2x(t-\varphi) + x(t-2\varphi)\big) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi) = x(t) - Q_1 t - x(t) + 2x(t-\varphi) + x(t-2\varphi) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi)$ *(формула 11)*

Группируя члены в формуле 11 получаем:

$Q_0 = 2\big(x(t-\varphi) - \varepsilon(t-\varphi)\big) - \big(x(t-2\varphi) - \varepsilon(t-2\varphi)\big) - Q_1 t$ *(формула 12)*

Перемещая $Q_1 t$ в левую часть и исходя из формул 1 и 2 получаем:

$\boldsymbol{S(t) = 2S(t-\varphi) - S(t-2\varphi)}$ *(формула 13)*

Пусть теперь начальная функция будет квадратичной:

$S(t) = Q_2 t^2 + Q_1 t + Q_0$ *(формула 14)*

И, следовательно, по аналогии с формулами 2 и 3 получаем:

$x(t) = Q_2 t^2 + Q_1 t + Q_0 + \varepsilon(t)$ *(формула 15)*

И следовательно:

$Q_0 = x(t) - Q_2 t^2 - Q_1 t - \varepsilon(t)$ *(формула 16)*

Также используя формулы 5 и 6 запишем формулу для разности третьего порядка с шагом $\varphi$ для функции $x(t)$:

$\Delta^3 x(t) = \Delta^2 x(t) - \Delta^2 x(t-\varphi) = x(t) - 2x(t-\varphi) + x(t-2\varphi) - x(t-\varphi) + 2x(t-2\varphi) - x(t-3\varphi) = x(t) - 3x(t-\varphi) + 3x(t-2\varphi) - x(t-3\varphi)$ *(формула 17)*

Теперь выразим все разности, начиная с первой, но используя формулу 15:

$\Delta x(t) = x(t) - x(t-\varphi) = Q_2 t^2 + Q_1 t + Q_0 + \varepsilon(t) - Q_2 (t-\varphi)^2 - Q_1(t-\varphi) - Q_0 - \varepsilon(t-\varphi) = Q_2 t^2 + Q_1 t + Q_0 + \varepsilon(t) - Q_2(t^2 - 2t\varphi + \varphi^2) - Q_1 t + Q_1\varphi - \varepsilon(t-\varphi) = 2Q_2 t\varphi + Q_1\varphi - Q_2\varphi^2 + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\varphi)$ *(формула 18)*

$\Delta^2 x(t) = \Delta x(t) - \Delta x(t-\varphi) = 2Q_2 t\varphi + Q_1\varphi - Q_2\varphi^2 + \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\varphi) - 2Q_2(t-\varphi)\varphi - Q_1\varphi + Q_2\varphi^2 - \varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi) = 2Q_2\varphi + \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi)$ *(формула 19)*

$\Delta^3 x(t) = \Delta^2 x(t) - \Delta^2 x(t-\varphi) = 2Q_2\varphi + \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-\varphi) + \varepsilon(t-2\varphi) - 2Q_2\varphi - \varepsilon(t-\varphi) + 2\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi) = \varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-\varphi) + 3\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi)$ *(формула 20)*

Следовательно:

$\varepsilon(t) = \Delta^3 x(t) + 3\varepsilon(t-\varphi) - 3\varepsilon(t-2\varphi) + \varepsilon(t-3\varphi)$ *(формула 21)*

Теперь подставим значение формулы 21 в формулу 16:

$Q_0 = x(t) - Q_2 t^2 - Q_1 t - \varepsilon(t) = x(t) - Q_2 t^2 - Q_1 t - \Delta^3 x(t) - 3\varepsilon(t-\varphi) + 3\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi)$ *(формула 22)*

Далее в формулу 22 подставим значение из формулы 17:

$$Q_0 = x(t) - Q_2 t^2 - Q_1 t - \big(\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-\varphi) + 3\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi)\big) - 3\varepsilon(t-\varphi) +$$
$$3\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi) = x(t) - Q_2 t^2 - Q_1 t - \varepsilon(t) + 3\varepsilon(t-\varphi) - 3\varepsilon(t-2\varphi) +$$
$$\varepsilon(t-3\varphi) - 3\varepsilon(t-\varphi) + 3\varepsilon(t-2\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi) = 3\big(x(t-\varphi) - \varepsilon(t-\varphi)\big) -$$
$$3\big(x(t-2\varphi) - \varepsilon(t-2\varphi)\big) + \big(x(t-3\varphi) - \varepsilon(t-3\varphi)\big) - Q_2 t^2 - Q_1 t$$ *(формула 23)*

Перемещая $Q_2 t^2 + Q_1 t$ в левую часть и исходя из формул 2 и 15 получаем:

$$\boldsymbol{S(t) = 3S(t-\varphi) - 3S(t-2\varphi) + S(t-3\varphi)}$$ *(формула 24)*

В общем случае для начальной функции степени $n$ коэффициенты будут выражаться с помощью коэффициентов бинома Ньютона:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

И обобщённая функция для функции $S(t)$, заданной полиномом степени $n$ и выраженной через $(n+1)$ предыдущих значений, взятых через равный интервал $\varphi$ будет иметь вид:

$$\boldsymbol{S(t) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{(k-1)} C_{(n+1)}^{k} S(t - k\varphi)}$$

04 апреля 2019 года

Йошкар-Ола

DocuSigned by:
Yury Strozhevsky
E51EFF0E80D345A...

Строжевский Юрий Владимирович